

山形大学紀要(工学)第14巻 第2号 昭和52年2月
Bull. of Yamagata Univ. Eng., Vol.14 No.2 Feb. 1977

不均一プラズマのスペクトル線の拡がり

I 部 — Doppler 幅とイオン温度の決定

佐 藤 益 美

工学部 電気工学科

(昭和51年9月24日受理)

1. 緒 言

プラズマからさまざまな過程により放射される光の測定, すなわち, プラズマの分光測定はプラズマ診断の有力な方法であり, 特に最近, 高温・高密度プラズマ生成と関連して重要性を増している。容器内のプラズマの荷電粒子, 中性粒子の密度, 温度分布は, 一般には, 空間的に一様でなく, これに対してあるひとつの過程による発光の強度も場所により異なる。従って, 外部へ放射される光を観測する場合, プラズマを見る視線方向に沿って積分された光を観測することになる。このような放射光の全強度分布から, 各位置での発光の強度を復元(逆変換)し, 今注目している発光過程を考慮すれば, プラズマ諸量の空間分布が算出される。しかし, この逆変換には多大の労力を要し, 光の全強度分布からのより容易なプラズマ諸量の算出法が望まれる。

この論文は発光過程として, 熱運動をしている粒子の *Doppler* 効果によるスペクトル線の拡がりを考え, 空間的に不均一なプラズマのスペクトル線の全強度分布を求める。ついで, この分布から各位置での光の強度をすべて算出することなく, 一部の逆変換により, より容易にイオン温度の空間分布を得る方法について述べる。

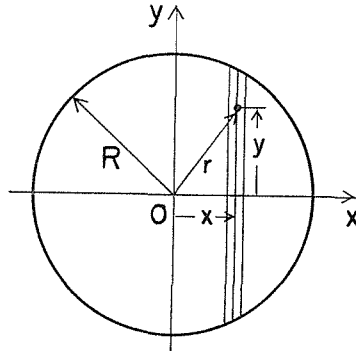
2. 不均一プラズマの Doppler 幅

最初に, 密度, 温度一様なプラズマのスペクトル線の *Doppler* 幅を考える。熱運動をしている発光粒子(イオンもしくは原子)の波長 λ のスペクトル線は *Doppler* 効果による拡がりを示し, 粒子の速度分布が温度 T をもった *Maxwell* 分布である時, 波長—強度分布は *Gauss* 形となる。半値幅 $2\Delta\lambda_h$ の測定から, 次式により温度 T が求まる¹⁾。

$$\Delta\lambda_h (\text{\AA}) = 3.58 \times 10^{-7} \lambda (\text{\AA}) [T(\text{K})/A]^{1/2} \quad (1)$$

ここに, A は発光粒子の原子量である。

次に, プラズマの組成が空間的に不均一な場合を考える。第1図は円筒状あるいはトーラス状プラズマの断面を示し, プラズマは軸対称で, 円周方向に一様であるとする。従って, 発光しているイオンの温度 T , 密度 n は半径 r のみの関数となり, 管壁 $r=R$ において零とする。イオンが局所的に熱平衡(LTEと略す)にあるとすると, 各点でのスペクトル線の *Doppler* 幅 $\Delta\lambda$ の分布 $\epsilon(r, \Delta\lambda)$ は次式で与えられる。²⁾



第1図 円柱状プラズマの断面

$$\varepsilon(r, \Delta\lambda) = [\varepsilon(r)/\pi^{1/2} \Delta\lambda_D] \exp[-(\Delta\lambda/\Delta\lambda_D)^2] \quad (2)$$

ここに,

$$\varepsilon(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(r, \Delta\lambda) d(\Delta\lambda) = K n(r)$$

$$\Delta\lambda_D = (\lambda/c) [2kT(r)/m]^{1/2}$$

であり, c は光速, k は Boltzmann 定数, m はイオンの質量である。 $\varepsilon(r)$ は密度 $n(r)$ に比例し, その定数が K である。原点から x だけ離れた y 軸に平行な線に沿って放出される光の総計, すなわち, 全発光強度分布 $I(x, \Delta\lambda)$ は, プラズマが光学的に薄く吸収がない場合,

$$I(x, \Delta\lambda) = 2 \int_x^R \frac{\varepsilon(r, \Delta\lambda)}{\sqrt{r^2 - x^2}} r dr = 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \varepsilon(r, \Delta\lambda) dy \quad (3)$$

で与えられ, Abel 積分となる^{1,2)}。従って, 全強度分布は局所的な Gauss 分布 $\varepsilon(r, \Delta\lambda)$ の重畳されたものとなる。(2) 式を (3) 式に代入すると,

$$I(x, \Delta\lambda) = 2a \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{n(r)}{[T(r)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{b(\Delta\lambda)^2}{T(r)}\right] dy \quad (4)$$

$$a = K(b/\pi)^{1/2}, \quad b = (m/2k)(c/\lambda)^2.$$

任意の $T(r)$, $n(r)$ に対する Doppler 幅の分布は (4) 式から求められる。

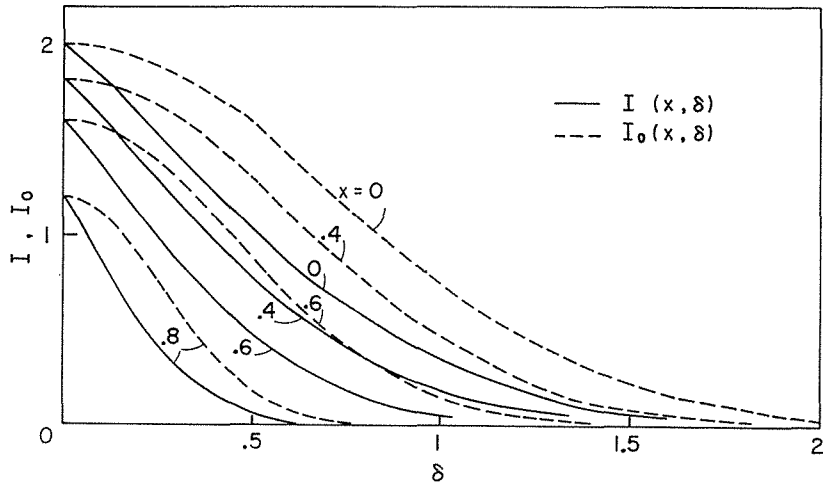
計算の例として次のような関数を考える。

$$\left. \begin{aligned} T(r) &= T(0)[1 - (r/R)^2]^2 \\ n(r) &= n(0)[1 - (r/R)^2] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

簡単のために, $R=1$, $T(0)=n(0)=1$, $a=1$ として, (4) 式を数値積分 (区間 $r=0 \sim R$ を百等分した Simpson 法) した結果を第2図に, 横軸を $\delta = b^{1/2} \Delta\lambda$ で規格化して実線で示す。これを一様なプラズマの場合と比較する。(4) 式から得られる

$$I_0(x, \Delta\lambda) = l_x n(x) [T(x)]^{-1/2} \exp[-b(\Delta\lambda)^2/T(x)] \quad (6)$$

を第2図に点線で示す。 l_x は視線方向のプラズマの長さで $2(R^2 - x^2)^{1/2}$ である。ここに



第2図 全発光強度分布。実線は不均一、点線は均一プラズマの場合

云う一様とは、不均一なる時のある位置 $r=x$ における温度、密度にプラズマ全体が一様に等しいことを意味し、(6) 式は x をパラメータとする *Gauss* 分布に他ならない。実線の半値幅は、例えば $x=0$ の場合、第2図から点線のその0.61倍となる。この半値幅の値から(1)式を用いて温度を計算すると(これは y 軸上の平均温度を与えると考えられる)、プラズマ中心の温度の0.37倍となり、 $r=0.62R$ での値に相当することが分る。

3. イオン温度の決定

第2図実線の全強度分布から点線のようなプラズマ内各点での発光強度分布を求める過程が逆変換である。このようにして得られた局所発光分布の半値幅から(1)式によりイオン温度が求められる。この操作、すなわち、(3)式の逆変換は

$$\varepsilon(r, \Delta\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{dI(x, \Delta\lambda)}{dx} \frac{dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}}$$

で与えられ、多くの計算法が提案されている。^{1,3)} ここでは、*Nestor* と *Olson*¹⁾ の方法に従う。第1図の円柱の半径 R を N 等分し ($d=R/N$)、逆変換する位置(原点から $r=x$ の距離)が中心から i 番目であると、上式は和の形に書き換えられる。

$$\varepsilon(r, \Delta\lambda) = -(2/\pi d) \sum_{j=i}^N B_{ij} I(jd, \Delta\lambda). \quad (7)$$

展開係数 B_{ij} は

$$\begin{aligned} B_{ij} &= -A_{ii}, \quad (j=i) \\ B_{ij} &= A_{ij-1} - A_{ij}, \quad (j \geq i+1) \\ A_{ij} &= \{[(j+1)^2 - i^2]^{1/2} - [j^2 - i^2]^{1/2}\} / (2j+1) \end{aligned}$$

で、原論文には $N=30$ までの表がある。(7)式の計算は多大の労力を要するが、以下に述べる方法により、逆変換の計算を一部行っただけで、イオン温度を算出することができ

る。

Doppler の拡がり中の任意の2点を取り、それぞれの波長幅 $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$ を考える。簡単のため、 $\varepsilon_1 = \varepsilon(r, \Delta\lambda_1)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon(r, \Delta\lambda_2)$ とおくと、(2) 式から (4) 式の a , b を用いて、

$$\left. \begin{aligned} T(r) &= b[(\Delta\lambda_2)^2 - (\Delta\lambda_1)^2] / \ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2) \\ n(r) &= (\varepsilon_1/a) [T(r)]^{\frac{1}{2}} \exp[b(\Delta\lambda_1)^2/T(r)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

このようにして、*Doppler* 幅の波長すべての $\Delta\lambda$ に対する逆変換 $\varepsilon(r, \Delta\lambda)$ は必要なく、 $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$ に対する逆変換を行ったのみで温度、密度が算出される。特に、 $T(r)$ は相対値 $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ から計算される。 $n(r)$ は絶対値 ε_1 と $T(r)$ 、および比例定数 a （分光測定系の感度などにより異なり、予め決める必要がある）を含み、測定誤差、逆変換誤差の観点から実際的でない。(8) 式の計算は、 $\Delta\lambda_1 = 0$ （すなわち中心波長）ととると、更に簡単になる。(8) 式の関係は、LTEにあるイオンのエネルギー準位 E_1 と E_2 にある束縛電子が下の準位に遷移する際のスペクトル線の強度 ε_1 , ε_2 から、電子温度 T_e を求める関係式¹⁾

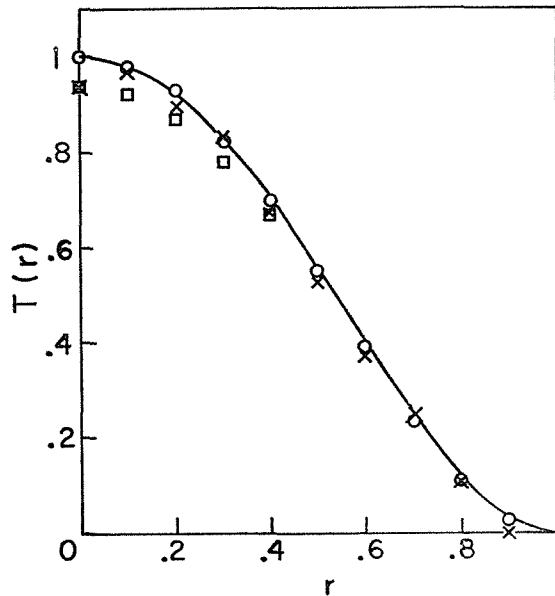
$$T_e = (E_2 - E_1) / k \ln(C\varepsilon_2/\varepsilon_1)$$

と比較される。ここに、 C は遷移確率、*Gaunt* 因子等を含む定数である。

4. 逆変換の結果と討論

前節(8) 式の方法により、第2図実線の全強度分布 $I(x, \Delta\lambda)$ から $T(r)$ の原関数(5) 式を復元する。 $n(r)$ の復元は、上述の理由により行なわない。

半径 R を10等分 ($d=0.1$) し、2つの波長のずれを $\delta_1 = b^{\frac{1}{2}}\Delta\lambda_1 = 0$, $\delta_2 = 0.5$ ととる。



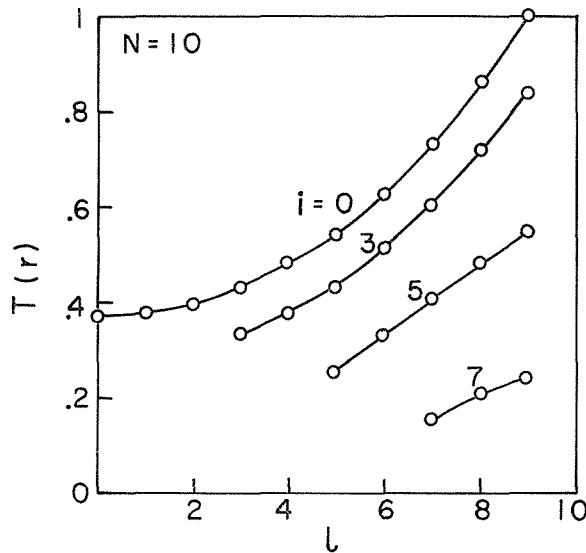
第3図 $T(r)$ の原曲線（実線）と第2図からの復元値。記号については本文参照

以下の (a), (b) とともに係数 B_{ij} は有効数字 3 桁とする。第 3 図に, (a) I の有効数字を 4 桁までとした時の逆変換の結果を \circ で, (b) 2 桁までの結果を \times で示し, $T(r)$ の原関数を実線で与えられている。有効桁数の多い (a) では, 一致はよいが, 有効桁数の少ない (b) では変換誤差が大きく, 特に, 原点近くで変換値は落ち込み, $r=0.9R$ では零となる。

$T(r)$ の算出誤差 ΔT を考える。(8) 式から

$$\frac{\Delta T}{T} = - \frac{T}{b[(\Delta\lambda_2)^2 - (\Delta\lambda_1)^2]} \left(\frac{\Delta\epsilon_1}{\epsilon_1} - \frac{\Delta\epsilon_2}{\epsilon_2} \right) \quad (9)$$

ここに, $\Delta\epsilon_1$ と $\Delta\epsilon_2$ は ϵ_1 と ϵ_2 の算出誤差である。上式から $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$ の選び方による誤差 ΔT の大きさが推定できる。両者の差が大きい程, ΔT は小さくなるが, しかし, あまり大きい $\Delta\lambda_2$ では全強度分布のすその部分を読み取ることになり, ϵ_2 の誤差が無視できなくなる。前例との比較のために, (a) と同じ条件で, $\delta_2=0.5$ の代りに 0.3 とした場合の $T(r)$ の変換の結果を第 3 図に \square で示す。一致は悪くなる。この場合の誤差は前例と比較して, ϵ_1 と ϵ_2 の誤差は変らないとして, (9) 式から $(0.5/0.3)^2 = 2.8$ 倍になることが分る。



第 4 図 $T(r)$ 算出の際の打ち切り誤差

最後に, 逆変換の計算を一部打切った時の誤差を考える。プラズマ円柱の端の方では発光が弱いために, 光強度の測定が困難になり, (7) 式の計算を適当な個所で打切らねばならない。計算を $j=i$ 番目から始めて l 番目までとすると, $l+1$ から最後の N 番目 (ここでは実際は零で, 実質上 $N-1$ 番目) までは切捨てられる。この時の誤差は (9) 式の $\Delta\epsilon_1$, $\Delta\epsilon_2$ で表わされ, l が i に較べて充分大きい場合, 同式右辺の括弧の量は l とともにほぼ直線的に減少する。このことは第 3 図の変換例 (a) の計算を途中で打切った結果を示す第 4 図からも理解される。グラフの横軸は l , パラメータは i であるが, 例えば $i=0$ の曲線の $l=6$ での値は, $l=7$ 以後の計算を切ったことを表わしている。以上のことか

ら，計算を適当な個所で打切っても，直線的な外挿によって， $T(r)$ をより正確に求めることが可能となる。

5. 結 言

空間的に不均一なプラズマ円柱から放出されるスペクトル線の *Doppler* 幅の分布を，LTE かつ光学的に薄いプラズマについて考察した。イオン温度の計算法を提案し，实例にもとづいて，算出および誤差を論じた。

References

1. W. Lochte-Holtgreven; Plasma Diagnostics (North-Holland, Amsterdam 1968) chap. 3.
2. M. Sato; Phys. Fluids **17**, 1903 (1974).
3. C. Cremers and R. Birkebak; Applied Optics **5**, 1057 (1966).
4. O. Nestor and H. Olsen; SIAM Review **2**, 200 (1960).

佐藤：不均一プラズマのスペクトル線の拡がり I 部 — Doppler 幅とイオン温度の決定

Spectral Line Broadening by Nonuniform Plasmas Part I — Doppler Profile and Ion Temperature Determination

Masumi SATO

Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering

A simple method is presented for determination of the local ion temperature by the inverse Abel transform encountered when Doppler broadening of the spectral lines takes place in inhomogeneous plasmas. The case treated is for optically thin, axially symmetric plasmas in local thermal equilibrium. In this method only two spectral intensities from each Doppler profile are inverted into local intensities of the Doppler broadening. Local ion temperatures are calculated from the relative value of these local intensities without reading the half-widths of local Doppler profiles inverted by point-by-point transforms as in the usual method. An example of the transform is given by considering hypothetical radial distributions of the plasma, and errors in this process are also discussed.